

Schwingungen

Zeitlich periodische Vorgänge begegnen uns im Alltag in vielfältiger Weise. Ob eine Schaukel, die Saite einer Gitarre, die Spannung an der Steckdose oder der Blutdruck in unseren Adern, überall ändert sich eine physikalische Grösse in einem bestimmten Rhythmus.

Kenngrossen einer Schwingung

Schwingung:	Periodische Hin- und Her-Bewegung um eine Ruhelage
Oszillator:	ein schwingender Körper
Schwingungsdauer T:	Zeitdauer für eine Hin- und Her-Bewegung (SI-Einheit: Sekunde s)
Frequenz f:	Anzahl Schwingungen pro Sekunde (SI-Einheit: Hertz Hz), es gilt: $T = \frac{1}{f} \quad \text{(vgl. Kreisbewegung)}$
Elongation y:	momentane Auslenkung aus der Ruhelage
Amplitude A, \hat{y}, y_0:	maximale Auslenkung aus der Ruhelage

Allgemein gilt: Jede Schwingung benötigt eine **rücktreibende Kraft!**

Wir werden uns im Folgenden eine besondere Art von Schwingungen sogenannte *harmonische Schwingungen* anschauen.

Das Federpendel

Die einfachste Anordnung, welche harmonisch schwingt, ist das Federpendel. Durch Anhängen eines Körpers wird die Feder so weit gedehnt, dass die Federkraft die Gewichtskraft kompensiert: Das Pendel ist im Gleichgewicht, d.h. in Ruhe. Für die Federkraft gilt das Hooke'sche Gesetz. Wird der Pendelkörper nach unten gezogen, so wird die Federkraft das Pendel wieder in die Ruhelage zurückführen. Wegen der Trägheit der Masse bewegt sich der Pendelkörper über die Ruhelage hinaus. Die Federkraft wird geringer, schliesslich ist die Gewichtskraft wieder grösser als die Federkraft und der Körper bewegt sich abermals nach unten. Der Pendelkörper schwingt.

Wir betrachten die Ruhelage des Pendels. Hier gilt das Kräftegleichgewicht:
$$F_F = F_G \quad \text{Dabei ist } D \text{ die Federkonstante, } y_0 \text{ die Auslenkung der Feder bei der Ruhelage, } g \text{ die Erdbeschleunigung und } m \text{ die Masse des Pendelkörpers.}$$

Die rücktreibende Kraft $F_{\text{Rück}}$ ist die Differenz aus Federkraft und Gewichtskraft:
$$F_{\text{Rück}} = F_F - F_G = D y_{\text{tot}} - D y_0 = D \cdot (y_{\text{tot}} - y_0) = D \cdot y$$

Hier ist y_{tot} die Auslenkung der Feder aus dem unbelasteten Zustand und y die Auslenkung aus der Ruhelage (Elongation).

Die rücktreibende Kraft ist also proportional zur Elongation y . Unterliegt ein Oszillator diesem linearen Kraftgesetz, so schwingt dieser harmonisch.

Für harmonische Schwingungen gilt also:

$$\vec{F}_{\text{Rück}} = -D \cdot \vec{y}$$

Das Minuszeichen zeigt an, dass die Kraft die entgegengesetzte Richtung der Elongation besitzt und

somit rücktreibend ist. Hier sind die Kraft und die Elongation als Vektoren notiert. Bei konkreten Berechnungen kann das Minuszeichen weggelassen werden. Nachfolgende Animation [1] zeigt die harmonische Schwingung des Federpendels (hier wird die Elongation mit y bezeichnet).



Die Proportionalitätskonstante D entspricht beim Federpendel gerade der Federkonstanten. Zudem ist ersichtlich, dass die Schwingung unabhängig vom Ortsfaktor g ist. Diese Eigenschaft wird in der ISS genutzt, um Personen zu wiegen:



Die Bewegung des Federpendels

Um die Bewegung des Federpendels zu beschreiben, müssen wir herausfinden, wie sich die Beschleunigung a , die Geschwindigkeit v und die Elongation y des Körpers verändern. Die rücktreibende Kraft hängt von der Elongation ab, welche sich stetig ändert. Das bedeutet auch, dass die Beschleunigung a nicht konstant sein kann (zweites Newtonsches Axiom: $F = m \cdot a$). Die Überlegungen drohen also kompliziert zu werden. Mit einem Trick kann die Herleitung jedoch stark abgekürzt werden: Das Bewegungsgesetz des Federpendels lässt sich aus einer Analogie zwischen Kreisbewegung und Schwingung herleiten. Denn eine Kreisbewegung ist ebenso wie eine Schwingung eine periodische Bewegung mit einer Periodendauer T .

Der Schatten eines Körpers auf einer Kreisbahn und der Schatten des Pendelkörpers schwingen synchron. Die Elongation des Federpendels lässt sich also mithilfe physikalischen Größen der Kreisbewegung ausdrücken.



Erinnerung: Bei einer gleichförmigen Kreisbewegung gelten für die Bahngeschwindigkeit v_B und die Zentripetalbeschleunigung a_Z folgende Beziehungen:

$$v_B = \frac{2\pi r}{T} \quad a_Z = \frac{v_B^2}{r}$$

Arbeitsblatt Kreisbewegung & harmonische Schwingung

Je nach Wahl des Anfangspunktes (Nullwinkels) werden aus den Kosinuskurven Sinuskurven und umgekehrt. Wegen diesen Kurven werden harmonische Schwingungen auch sinusförmige Schwingungen genannt.



Durch Einsetzen der oben gefundenen Ausdrücke in die rücktreibende Kraft, lässt sich die Periodendauer T berechnen:

$$\begin{aligned} F = -D \cdot y &= m \cdot a = -D \cdot (-r \cdot \cos \varphi) = m \cdot a_z \cdot \cos \varphi \\ D \cdot r \cdot \cos \varphi &= m \cdot \frac{v_B^2}{r} \cdot \cos \varphi \\ D \cdot r^2 &= m \cdot v_B^2 \\ D \cdot r^2 &= m \cdot \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2 \end{aligned}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$$

Diese Erkenntnisse können am Experiment veranschaulicht und überprüft werden.


Aufgaben I

1. Ein Körper führt eine harmonische Schwingung aus. An welchen Punkten seiner Bahn erreicht er die grösste Geschwindigkeit, resp. die grösste Beschleunigung?
2. Ein Körper mit einer Masse von 80 g wird an eine Schraubenfeder gehängt, worauf sich diese um 14 cm verlängert. Anschliessend wird das so entstandene Federpendel in Schwingung versetzt, indem die Feder um zusätzliche 20 cm gestreckt und dann losgelassen wird.
 1. Wie gross ist die Schwingungsdauer dieses Federpendels?
 2. Mit welcher Geschwindigkeit schwingt der Pendelkörper durch die Ruhelage?
3. An eine Schraubenfeder wird eine Masse von 2.4 kg angehängt.
 1. Die Feder benötigt für eine Schwingung genau eine Sekunde. Wie gross ist die Federkonstante?
 2. Welche Masse müsste man anhängen, um die Pendelfrequenz zu verdoppeln?
4. Zwanzig Personen steigen in einen Reisebus. Dabei senkt sich die Karosserie um 10 cm. Nehmen Sie an, jede Person besitze eine Masse von 75 kg.
 1. Welche Federkonstante besitzt der Reisebus?
 2. Wie gross ist die Schwingungsdauer des leeren und des besetzten Reisebusses, wenn die Masse des mitschwingenden Wagenteils 3.0 t beträgt?

Lösungen

1) vgl. Graphen; 2)a) $T = 0.75$ s, b) $v = 1.7$ m/s; 3)a) $D = 95$ N/m, b) $m = 0.60$ kg; 4)a) 147 kN/m, b) $T_{\text{leer}} = 0.90$ s, $T_{\text{voll}} = 1.1$ s.

Das Fadenpendel

Als zweites Beispiel eines einfachen Pendels dient die Schwingung eines Körpers mit der Masse m , der an einem masselosen Faden der Länge l befestigt ist. Ob dieses Fadenpendel ebenfalls harmonisch schwingt? 

Auf die Masse m wirkt in jeder Position die Gewichtskraft F_G . Im tiefsten Punkt 0 , der Ruhelage, wird diese von der Fadenkraft F_F vollständig kompensiert. Sobald das Pendel um einen Winkel φ ausgelenkt wird, ist dies nicht mehr der Fall, denn die beiden Kräfte wirken jetzt in verschiedene Richtungen. Die Gewichtskraft F_G kann nun (ähnlich wie bei der schiefen Ebene) in zwei Komponenten zerlegt werden: eine radiale Komponente F_{\parallel} in Richtung des Fadens und eine tangentielle Komponente F_{\perp} senkrecht dazu. Die Fadenkraft F_F kompensiert hier nur noch die radiale Komponente F_{\parallel} . Die tangentielle Komponente F_{\perp} bleibt übrig und wirkt als rücktreibende Kraft auf die ausgelenkte Masse m . Sie hat den Betrag

$$F_{\perp} = F_G \cdot \sin \varphi = (m \cdot g) \cdot \frac{x}{l} = \frac{m \cdot g}{l} \cdot x$$

Diese Kraft ist offensichtlich nicht proportional zur Auslenkung x (welche die Bogenlänge darstellt). Folglich ist die Schwingung, die dieses Pendel ausführt, nicht harmonisch. Werte allerdings kleine Winkel betrachtet, so ist die Auslenkung x nur unwesentlich grösser als die Strecke s und darf

deshalb durch diese ersetzt werden (sogenannten Kleinwinkelnäherung). Damit wird die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung, was die Folgerung zulässt:

Bei kleinen Auslenkungen schwingt ein Fadenpendel annähernd harmonisch.

In dieser Näherung gelten alle Gesetze des Federpendels auch für das Fadenpendel. Allerdings muss die Proportionalitätskonstante D des Federpendels durch diejenige des Fadenpendels ($\frac{mg}{l}$) ersetzt werden. Dies ergibt für die Schwingungsdauer (Periode) des Fadenpendels $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{l}}} = 2\pi \cdot \sqrt{m \cdot \frac{l}{g}}$

Beachte: Die Schwingungsdauer des Fadenpendels ist unabhängig von der schwingenden Masse m !

Anwendung: Bestimmung der Fallbeschleunigung g

Mit einem Fadenpendel kann relativ leicht die örtliche Fallbeschleunigung g bestimmt werden. Man misst von einem Fadenpendel die Fadenlänge l und die Schwingungsdauer T und löst obige Formel nach g auf.

Aufgaben II


- Im Jahre 1851 konnte Léon Foucault (1819-1868) im Pantheon in Paris zum ersten Mal den experimentellen Beweis für die Erdrotation erbringen. Er benutzte dazu ein Pendel der Länge 67 m und eine Kugel der Masse 28 kg. Wie lange dauerte es, bis die ausgelenkte Kugel aus der einen Extremlage in die andere gelangte? (Hinweis: Ein ähnliches, etwas kleineres Experiment können Sie im Technorama Winterthur bestaunen.)
- Ein Sekundenpendel benötigt für eine halbe Schwingung genau eine Sekunde. Wie lang ist seine Fadenlänge?
- \star Die grosse Pendeluhr im Wohnzimmer geht pro Tag 5 Minuten nach. Marco, der im Physikunterricht gerade die Schwingungslehre behandelt, verspricht der Mutter, die Pendellänge der Uhr so zu verstellen, dass sie danach richtig geht. Er misst für die Länge des Pendels 38.0 cm. Muss Marco das Pendel verlängern oder kürzen? Um wie viele Millimeter muss er das tun, damit die Uhr danach richtig geht? (Hinweis: Das Pendel schwingt nicht im Sekundentakt.)
- Das Fadenpendel schwingt nur bei kleinen Auslenkungen harmonisch. Doch was heisst „kleine Auslenkungen“ konkret? Wie gross wird der relative Fehler, wenn man die Strecke x statt die Bogenlänge s verwendet? Betrachten Sie dazu ein Fadenpendel mit einer Fadenlänge von 1 m.
 - Berechnen Sie für den Winkel $\varphi = 10^\circ$ die Strecken x und die Bogenlänge s . Um wie viele Prozent ist x kleiner als s ?
 - Wiederholen Sie die Rechnung für die Winkel 20° und 30° .
 - \star Zeigen Sie, dass die oben berechneten Abweichungen für beliebige Fadenlängen gültig sind.
 - \star Für welchen Winkel beträgt die Abweichung 1 %, 5 %, 10 %?

Lösungen

1) $t = 8.2$ s; 2) $l = 99.4$ cm; 3) kürzen um $\Delta l = 2.6$ mm; 4) a) 0.5 %, b) 2.0 %, 4.5 %, c) r kürzt sich raus, d) $\varphi = 14^\circ, 32^\circ, 45^\circ$.

Die gedämpfte Schwingung


Eine harmonische Schwingung sollte theoretisch, wenn sie einmal angestoßen ist, ewig und mit konstanter Amplitude weitergehen. Dies wird **freie harmonische Schwingung** genannt. Zeichnet man in diesem Fall die Elongation y der schwingenden Masse als Funktion der Zeit t (also das Weg-Zeit-Diagramm), erhält man eine Sinuskurve.

Die Erfahrung zeigt aber, dass bei allen realen Pendeln und schwingenden Körpern, die keine äussere Energiezufuhr besitzen, die Amplitude allmählich abnimmt und die Bewegung schliesslich zur Ruhe kommt. Dies ist darauf zurückzuführen, dass neben der rücktreibenden Kraft auch noch Reibungskräfte wirken. Die dadurch verursachte Abnahme der Amplitude bezeichnet man als Dämpfung. Ein real schwingendes System führt also eine **gedämpfte harmonische Schwingung** aus. 

Im Weg-Zeit-Diagramm der gedämpften harmonischen Schwingung sind die sinkenden Amplituden deutlich erkennbar. Die zugehörigen Umkehrpunkte der Schwingung liegen übrigens auf der Kurve einer Exponentialfunktion.

Nimmt die Amplitude der Schwingung nur langsam ab, spricht man von schwacher Dämpfung. Obwohl die zugehörige Pendelbewegung nicht mehr exakt periodisch ist, dürfen Schwingungsdauer T und Frequenz f (sowie die Formeln zu ihrer Berechnung) weiterhin verwendet werden. Exakte Messungen haben gezeigt, dass eine schwache Dämpfung die Schwingungsdauer eines Pendels nur unwesentlich verlängert. (So ist dies auch im Diagramm kaum sichtbar.) Schwache Dämpfung wird z.B. durch Luftreibung hervorgerufen.

Wird die Dämpfung stärker (z.B. Reibung durch eine Flüssigkeit), ist oben Genanntes nicht mehr der Fall. Die Bewegung kommt hier sehr schnell zur Ruhe. Im Grenzfall („kritische Dämpfung“) schwingt der Körper gar nicht mehr über die Ruhelage hinaus. Wird die Dämpfung noch weiter verstärkt („überkritische Dämpfung“), kriecht der Körper nur noch langsam in seine Ruhelage zurück.

Dämpfung ist nicht immer schädlich! So haben die Stossdämpfer in einem Auto die Aufgabe, das Nachschwingen beim Überfahren von Unebenheiten möglichst schnell abzdämpfen, um damit die Bodenhaftung zu verbessern. Auch Waagen und Zeigerinstrumente sind kritisch gedämpft, damit sie möglichst rasch abgelesen werden können. 

Soll die Amplitude eines gedämpften Systems konstant gehalten werden, muss die von der Reibung (Dämpfung) entzogene Energie laufend ersetzt werden. Dies geschieht am besten, indem durch eine geeignete Vorrichtung im richtigen Moment gleich viel Energie zugeführt wird. Ein Kind auf einer Schaukel macht dies intuitiv durch Vor- und Zurücklehnen. Bei einer Pendeluhr geschieht dies über den so genannten Anker (vgl. Abbildung): Das Antriebsgewicht gibt dem Pendel über die Zahnräder bei jeder Halbschwingung noch einen kleinen Zwick nach aussen.


Erzwungene Schwingung und Resonanz

Wenn ein schwingungsfähiges System (wie z.B. ein Pendel) nur unter dem Einfluss der rücktreibenden Kraft steht, schwingt es mit einer ganz bestimmten Frequenz. Diese wird **Eigenfrequenz f_0** des Systems (resp. Pendels) genannt. Was geschieht aber, wenn auf dieses System von aussen eine periodische Kraft mit beliebiger Frequenz einwirkt?

Zu diesem Zweck wird als Experiment ein Federpendel mit einer Schnur an eine drehbare

Exzentrerscheibe gehängt und der Vorgang genauer untersucht.

Der Exzenter wird mit dem Motor in Gang gesetzt. Er bewegt sich damit mit einer (von der Motorendrehzahl abhängigen) Frequenz, der so genannten **Anregungsfrequenz f_f** . Ist die Anregungsfrequenz klein (im Vergleich zur Eigenfrequenz des Pendels) schwingt das Pendel nach kurzer Einschwingphase ebenfalls mit dieser Anregungsfrequenz. Die Amplitude ist allerdings recht klein. Wird die Drehzahl des Motors langsam erhöht, beginnt das Pendel immer stärker zu schwingen.

Stimmt die Anregungsfrequenz f_f mit der Eigenfrequenz f_{f_0} überein, erreicht die Amplitude ein  Maximum. Dieser spezielle und zugleich wichtige Fall heisst **Resonanz**. Ist die Dämpfung sehr klein, so kann die Amplitude über alle Grenzen anwachsen, was zur Beschädigung oder gar Zerstörung des Systems führt (**Resonanzkatastrophe**). Normalerweise wächst jedoch mit zunehmender Amplitude auch die Dämpfung, so dass sich ein stabiler Schwingungszustand einstellt.

Wird die Anregungsfrequenz weiter gesteigert (und damit grösser als die Eigenfrequenz des Pendels), beruhigt sich das Pendel wieder. Es bewegt sich wieder mit kleiner Amplitude. Bei sehr grossen Anregungsfrequenzen schwingt der Pendelkörper auf Grund seiner Trägheit praktisch nicht mehr. Lediglich die Feder zittert noch.

Der hier dargelegte Zusammenhang zwischen Anregungs- und Eigenfrequenz lässt sich in einem Diagramm, der so genannten **Resonanzkurve** (vgl. Abbildung), übersichtlich darstellen. Durch richtige Anregung und Resonanz kann also ein System recht einfach und schnell zum Schwingen gebracht werden. Dies hatte schon Galileo Galilei erkannt, als er das Läuten der Kirchenglocken studierte. Wie bereits erwähnt kann dies auch in der Katastrophe enden. Das berühmteste Beispiel dafür ist der Einsturz der Tacoma-Bridge in den USA.

In der Technik werden periodische Anregungen häufig durch rotierende Maschinenteile verursacht. Stimmt eine Eigenfrequenz eines anderen Maschinenteils (z.B. Welle, Turbinenschaufel, Gehäuse) mit dieser Rotationsfrequenz überein, kann es zu starken Vibrationen und im Extremfall sogar zur Zerstörung der Maschine kommen. Um dies zu vermeiden, wird die Amplitude der Anregung reduziert (z.B. Auswuchten der Autoräder), die Schwingung gedämpft oder bautechnisch dafür gesorgt, dass sich Anregungs- und Eigenfrequenzen deutlich unterscheiden.

Häufig wird ein System jedoch nicht durch eine einzige Frequenz, sondern durch ein ganzes Frequenzspektrum angeregt. Beispiele sind etwa das Schutzblech eines Fahrrades (angeregt durch die Erschütterungen während des Fahrens) oder eine Seilbahn (angeregt durch Wind). Falls in diesem Spektrum die Eigenfrequenz mit genügend grosser Intensität vorkommt, kann dies (je nach Dämpfung) zu einer deutlich sichtbaren Schwingung führen.

From:

<https://wiki.xn--ldi-qla.org/> - Lädi's Wiki

Permanent link:

<https://wiki.xn--ldi-qla.org/doku.php?id=ph:schwingungen>

Last update: **2022/08/14 22:43**

